

Απειροστικός Λογισμός ΙΙ, 3ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1) Δίνεται η συνάρτηση $f : [2, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 3$ για $x \in [2, 6] \cap \mathbb{Q}$ και $f(x) = 8$ για $f(x) = [2, 6] \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$. Ναδειχθεί ότι

$$\int_2^6 f(x) dx = 12 \quad \text{και} \quad \int_2^6 f(x) dx = 32.$$

Είναι η f Riemann ολοκληρώσιμη;

2) Υποθέτουμε ότι η $f : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη, ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ και για κάθε $t, s \in [a, \beta]$ με $t < s$ υπάρχει $x \in [t, s]$ με $f(x) = 0$. Ναδειχθεί ότι $\int_a^\beta f(x) dx = 0$.

3) Ναδείξετε, χωρίς χρήση παραγουσών, ότι $\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$. [Υπόδειξη: Θεωρήστε, για κάθε n , τη διαμέριση $\mathcal{P}_n = \{0 = \frac{0}{n} < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \dots < \frac{n}{n} = 1\}$. Χρησιμοποιήστε το άθροισμα $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$.]

4) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και για κάθε c με $0 < c < 1$ η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, c]$. Ναδείξετε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$.

5) Έστω $f : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της εκτός ενός $c \in [a, \beta]$. Ναδείξετε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη.

6) Η συνάρτηση $f : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$. Ναδειχθεί ότι $\int_a^\beta f(x) dx = 0$ αν και μόνο αν $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$.

7) Να υπολογιστούν τα παρακάτω τριγωνομετρικά αόριστα ολοκληρώματα:

$$\int \sin^2 x dx, \quad \int \sin^5 x dx, \quad \int \sin(15x) \cos(7x) dx.$$

8) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{\log x}{x} dx$ με δύο τρόπους α) Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση. β) Χρησιμοποιώντας αντικατάσταση.

9) Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων:

$$\int_{-2}^2 \frac{1}{x^2 - 16} dx, \quad \int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{3x^2 + 1}{x^3 - x^2 + x - 1}, \quad \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{6x + 8}{x^3 + 3x^2 + x + 3} dx.$$

10) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int e^{\sqrt{x}} dx, \quad \int \frac{1}{1 + e^x} dx, \quad \int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx.$$

11) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int x^2 e^x dx, \quad \int \sqrt{x} \log x dx, \quad \int \cos(\log x) dx, \quad \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx.$$